

РАЗМИНКА ДЛЯ МОЗГОВ

Задача 1. Решить систему

$$x + y = 2$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

$$x^8 + y^8 = ?$$

Задача 2. В окружность единичного радиуса вписан четырехугольник, имеющий углы 60° и 90° . Найти площадь четырехугольника.

Задача 3. Даны круг, площадью $S = 4$ и квадрат, периметр которого равен длине окружности. Найти площадь квадрата.

Задача 4. Найти x

$$(x + \sqrt{x}) / (x - \sqrt{x}) = 1.2$$

Задача 5. Центр круга единичного радиуса и центр квадрата со стороной a находятся в одной точке O . Все сегменты и «треугольники», расположенные по периферии фигуры, равновелики. Найти a .

Задача 6. Квадратный лист свернут и соединен встык в форме боковой поверхности цилиндра единичного диаметра. Найти площадь квадрата.

Задача 7. Найти все корни уравнения.

$$x^8 + iy^8 = 16$$

Задача 8. В квадрат вписан круг единичной длины окружности. Найти площадь квадрата.

Задача 9. В куб вписан шар единичной длины экватора. Найти объём куба.

Задача 10. Доминушка (прямоугольник 2×1) вписана: а) в круг и б) в квадрат – вдоль его диагонали. Найти соотношение площадей круга и квадрата.

Задача 11. Дан прямой круговой конус с кругом единичного радиуса при основании. Такой же круг вписан в развёртку боковой поверхности конуса. Найти длину образующей.

Задача 12. В сектор с углом A вписан круг. Найти угол A , при котором круг занимает максимальную долю площади сектора: а) среди углов $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$; б) точное значение угла A .

Задача 13. Дан ромб с углом 60° . Вписать в ромб круг. Из такого же ромба выкроить два сектора и сложить из них полукруг максимального

размера. Найти отношение площади вписанного круга к площади полукруга.

Задача 14. В квадрат A вписан равносторонний треугольник. Звезда Давида, образованная пересечением двух таких же треугольников, вписана в квадрат B . Различаются ли площади квадратов A и B , и если да, то на сколько процентов?

Задача 15. В квадрат 17×17 вписан квадрат 13×13 . Образовались треугольники. Найти их катеты.

Решить ту же задачу для других пар квадратов.

Задача 16. Четырёхугольник вписан в круг единичного радиуса. Его диагонали равны a , и пересекаются под прямым углом, образуя 4 треугольника. Сумма площадей двух противолежащих треугольников составляет $\frac{2}{3}$ площади четырёхугольника. Найти a .

Задача 17. В круг единичного радиуса вписан треугольник с углами 75° и 45° . Найти его площадь.

Задача 18. Один круг описан вокруг четырёхугольника, другой вписан в него. Отношение радиусов равно $35:24$. Четырёхугольник имеет прямой угол и сторону $a = 12$. Найти остальные стороны (два варианта ответа).

Задача 19. В циферблат часов вписан парашют. Его - это купол сегмента, ограниченный снизу хордой (10 - 2) часа, стропы - треугольник (2 - 6 - 10) часов. Сколько процентов от площади фигуры составляет купол?

Задача 20. Три одинаковые окружности частично пересекаются так, что только одна точка является общей для всех трёх окружностей. Пересекающиеся фрагменты образуют симметричный трилистник. Сколько процентов площади всей фигуры занимает трилистник?

Задача 21. Четыре окружности единичного радиуса, центры которых находятся в точках $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$ и $(0;-1)$, образуют общую фигуру. Найти площадь фигуры. Дать красивое решение.

Задача 22. В равнобедренную трапецию вписан круг единичного радиуса. Длина одной из сторон известна. Найти остальные и площадь трапеции. Дать одно из решений.

Задача 23. В равнобедренный треугольник площадью $S = \frac{27}{5}$ вписан круг единичного радиуса. Найти длину основания треугольника.

Задача 24. Две окружности, имеющие радиусы $r = 1$ и $r = 2$, пересекаются, образуя фигуру площадью $S = \frac{23}{6}\pi + \sqrt{3}$. Найти расстояние между точками пересечения. Решить в уме.

Задача 25. Точка на окружности единичного радиуса является центром второй окружности. Соотношение площадей первого и второго кругов, равно $1 : 3$. Найти площадь всей фигуры.

Задача 26. Точки касания четырёх одинаковых окружностей являются углами квадрата, а их дуги образуют внутри квадрата фигурку, похожую на туза бубей, площадью $S = (4 - \pi)$. Найти площадь квадрата.

Задача 27. Биссектриса прямого угла делит гипотенузу в соотношении $1:2$. Найти соотношение катетов.

Задача 28. Высота, опущенная на гипотенузу, делит её в соотношении $1:4$. Найти соотношение катетов.

Задача 29. Медиана, проведённая к гипотенузе, делит прямой угол в соотношении $1:2$. Найти соотношение катетов.

Задача 30. В круге радиусом $OA=5$ проведена хорда $AB=8$. Диаметр AD продлён до точки C за пределами круга $DC=5$. Найти площадь треугольника ABC .

Задача 31 (1,2,3). Геометрическую фигуру (треугольник, квадрат, круг) площадью 25 разделить линией (отрезком прямой или дугой окружности) на 2 фрагмента площадью $S = 9$ и $S = 16$. Обосновать выбор типа линии и место ее размещения, обеспечивающих минимальную длину этой линии.

Задача 32. У треугольника единичной площади сторона b больше, чем a , но меньше, чем c . Проведена линия сгиба так, чтобы согнутый треугольник занимал наименьшую площадь. Найти эту площадь. Самостоятельно найти дополнительное условие, обеспечивающее однозначный результат. Решить также для «египетского треугольника»

Задача 33. В треугольнике ABC из угла B проведены высота, биссектриса и медиана, пересекающие сторону AC в точках, D , E и F соответственно. $AD = DE = EF = 1$. Найти площадь треугольника.

Задача 34. Биссектрисы углов четырёхугольника, пересекаясь, образуют малый четырёхугольник, два угла которого касаются сторон исходного. Площадь малого четырёхугольника равна $S = 1$. Найти площадь исходного.

Задача 35. Одна сторона четырёхугольника равна $a = 1$, а прилегающие к ней углы равны 60° и 90° . Биссектрисы этих углов являются диагоналями четырёхугольника. Найти его площадь.

Задача 36. В треугольнике ABC угол $A = 60^\circ$, угол $C = 90^\circ$ градусов, сторона $AC = 1$. Биссектрисы углов доведены до пересечения с

противолежащими сторонами: AD, BE и CF. Найти площадь четырехугольника AFDE.

Задача 37. Квадраты сторон треугольника равны: 4; 12; 16. Найти углы.

Задача 38. Два полукруга единичного радиуса помещены в прямоугольник минимальной площади. Найти его размеры.

Задача 39. Круг единичного радиуса разрезан на N равных секторов, которые помещены в прямоугольник минимальной площади. Найти его размеры. Решить для $N = 3$ и $N = 4$.

Задача 40. Круг единичного радиуса разрезан на $N = 5$ фрагментов, которые помещены в квадрат минимальной площади. Найти эту площадь.

Задача 41. Круг единичного радиуса разрезан на фрагменты, которые помещены в ромб минимальной площади. Найти эту площадь.

Задача 42. Выпуклая фигура площадью $S = 25$ разрезана на $N = 2$ подобных друг другу фрагмента площадью $S_1 = 9$ и $S_2 = 16$. Найти размеры исходной фигуры.

Задача 01.05 Фальшивую банкноту достоинством 15 руб. разрезать на две подобные ей банкноты достоинством 7 и 8 руб. 1 кв. ед. = 1 руб. Найти размеры и указать линию реза.

Задача 43. Круг единичного радиуса разрезан на $N = 5$ фрагментов, которые помещены в правильный восьмиугольник минимальной площади. Найти эту площадь.

Задача 44. Равносторонний треугольник разрезать на N равных частей. Дать первые 10 значений N , для которых это возможно. Или общую формулу.

Задача 45. В круг помещено N одинаковых кругов меньшего радиуса, каждый из которых касается внешней окружности и двух соседей по ряду. Круги второго ряда касаются двух кругов первого ряда и двух соседей. И так далее. При каком числе N число рядов бесконечно?

Задача 46. Известно, что набором некоторых одинаковых многоугольников можно покрыть плоскость. Найти все пары правильных многоугольников, наборами которых можно покрыть плоскость. Включая одноимённые двух размеров. Включая варианты узора.

Задача 47. Произвольный треугольник разрезать на три части, площади которых пропорциональны: а) сторонам и б) квадратам сторон треугольника. Дать для: а) красивое и для б) простое решения.

Задача 48. От четверти круга единичного радиуса отрезать полукруг единичного диаметра. В оставшийся «клюв» вписать круг. Найти его радиус.

Задача 49. Стороны квадрата 1×1 являются диаметрами четырёх полукругов, которые, пересекаясь внутри квадрата, образуют четырёхлистник. Найти его площадь.

Задача 50. Сектор OAB является четвертью круга. Радиусы OA и OB равны 1 и являются также диаметрами двух полукругов, которые, пересекаясь, образуют внутри сектора «линзу» и фигурку, похожую на крылья. Найти площадь «крыльев».

Задача 51. Из углов квадрата размера 1×1 , как из центров, проведены четыре дуги единичного радиуса, которые разбили квадрат на $N = 9$ криволинейных фрагментов: один «квадратик» A , четыре «лепестка» B и четыре «треугольника» C . Найти площади A , B и C .

Задача 52. У правильного треугольника его стороны, равные $a = 1$, заменены дугами единичного радиуса: двумя выпуклыми и одной вогнутой. Найти радиус вписанного круга.

Задача 53. В прямоугольный треугольник (например, египетский) помещён квадрат двумя способами: а) две стороны лежат на катетах, один угол на гипотенузе и б) одна сторона лежит на гипотенузе, два угла на катетах. Найти отношение площадей квадратов.

Задача 54. В четверть круга помещён полукруг максимального размера. Найти долю полукруга от площади четвертушки.

Задача 55. В четверть круга помещены две фигуры, обе максимальной площади: либо треугольник A , либо четырёхугольник B . Найти отношение площадей этих фигур.

Задача 56. Три одинаковых малых полукруга помещены в большой полукруг и занимают максимальную долю его площади. Найти эту долю.

Задача 57. Три одинаковых малых круга помещены в большой круг и занимают максимальную долю его площади. Найти эту долю. Сравнить с ответом на задачу 56.

Задача 58. Четыре одинаковых малых полукруга помещены в большой полукруг и занимают максимальную долю его площади. Найти эту долю.

Ответы на самые легкие задачи

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
1	$x = 1 + i,$ $y = 1 - i,$ $x^8 + y^8 = 32$	15	12; 5
		17	$(\sqrt{3} + 3)/4$
		27	2
2	$\sqrt{3}$	28	2
3	π	29	$\sqrt{3}$
4	121	30	36
5	$\sqrt{\pi}$	33	$3\sqrt{7}$
6	$4\pi^2$	35	1/2
7		36	$(\sqrt{3} - 1)/2$
8	π^{-2}	37	$30^0, 60^0, 90^0$
9	π^{-3}	49	$\pi - 1$
10	$3.6/\pi$		

Надя Диковская, 21/06/24  